Probeklausur zu
Mathematik I
WS 2021/2022

Prof. Dr. M.Pieper

Datum: Mo, 20.12.2021
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Vorname: Nachname:

Note: Matrikelnummer:

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
max. Punkte	10	10	10	10	10	40
Punkte						

Hinweise:

- Insgesamt vier von fünf Aufgaben ergeben einhundert Prozent. Es wird individuell die Aufgabe mit den wenigsten Punkten gestrichen!
- Bitte nutzen Sie Vorder- und Rückseite zum Bearbeiten der Aufgaben und schreiben Sie Ihre Lösungen bitte immer direkt zu den entsprechenden Aufgaben.
- Bitte lösen Sie *nicht* die Heftklammern.
- Sie dürfen einen normalen, nicht grafikfähigen Taschenrechner verwenden.
- Erlaubt ist ein beidseitig handbeschriebenes DIN A4 Blatt als Formelsammlung.

Aufgabe 1: (Mathematische Objekte)

a) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $z = \dfrac{i}{i+1}$.

b) Welchen Winkel bilden die beiden Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} ?$$

c) Berechnen Sie das Produkt der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: (Funktionen und ihre Eigenschaften)

a) Wir betrachten eine Schallquelle mit Frequenz f_S. Diese bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v < c$ auf uns zu. Wir nehmen die Frequenz f_B wahr, für die gilt

$$f_B = \frac{f_S}{1 - \frac{v}{c}} ,$$

wobei c die Schallgeschwindigkeit bezeichnet. Das Auto bewegt sich auf uns zu. Ist dann die Frequenz f_B größer oder kleiner als f_S? Begründen Sie an Hand der Formel ihre Antwort (Kausalzusammenhang). Was passiert, wenn sich die Schallquelle wegbewegt? Wie kann dieser Effekt mit der Formel erklärt werden?

b) Es wurden die Messwerte in Abb. 1 aufgenommen. Liegen Extrema vor? Handelt es sich um Maxima oder Minima? Begründen Sie ihre Ergebnisse an Hand der Messwerte, indem Sie z.B. die Tabelle entsprechend erweitern und mit diesen Werten argumentieren.

x	0,1	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7	0,9	1	1,1
f(x)	0,47	0,38	0,25	0,21	0,2	0,23	0,34	0,43	0,66

Abbildung 1: Messwerte zu Aufgabe 2 b)

Aufgabe 3: (Differentialrechnung)

a) In welchem Bereich steigt bzw. fällt die Funktion

$$f(x) = x^2 - 4x + 1\,?$$

b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung zum Skalarfeld

$$f(x, y) = xy^2 - yx^3$$

im Punkt $P = (-1, 1)$ in Richtung $\vec{v} = (1\,,\,-1)^T$.

Aufgabe 4: (Extrema)

Bestimmen Sie alle Extrema des Skalarfeldes:

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - y$$

Geben Sie auch an, ob es sich um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt.

Aufgabe 5: (Integralrechnung)

a) Bestimmen Sie die Fläche unter der Kurve $f(x) = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot x$ im Intervall $[-1, 1]$.

b) Berechnen Sie das folgende Doppelintegral:

$$\int_1^2 \int_0^1 x^2 \cdot y - y^3 \, dx \, dy\,.$$

Viel Erfolg!